

第2讲因式分解基本解法（二）

一、十字相乘法

1. 二次项系数是 ± 1

分解因式中的常见题型： $x^2 + (p + q)x + pq$ 型的二次三项式

如果 常数项 b 可以分解为 p 、 q 的 积，并且有 $p + q = a$ ，

$$\begin{array}{cc} 1 & p \\ & \times \\ 1 & q \end{array}$$

$$1 \cdot p + 1 \cdot q = p + q$$

那么 $x^2 + ax + b = (x + p)(x + q)$ ．这就是分解因式的 十字相乘法．

【备注】比如，对 $x^2 + 3x + 2$ ，把二次项系数、常数项作因数分解分别写在第一列和第二列，然后计算交叉相乘的结果，如果与原式一次项系数相等，那么就把每一行的两个数分别当作每个因式的一次项系数和常数项，完成因式分解；如果与原式一次项系数不相等，那么就再重复上面的过程、再列十字．

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & \times \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$$

所以 $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ ．

【注意】

1. 要做分解的式子是 二 次 三 项式．
2. 如果二次项系数是 -1 ，就把 -1 当作 公因式 提出来（此时各项都要变号），再用十字相乘法继续做因式分解．

3. 如果所有列出的十字都不满足交叉相乘的结果等于原式一次项系数，那么这个式子无法在有理数范围内分解。

举个“栗”子

栗子1

1. 分解因式：

$$(1) x^2 + 5x + 6 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【备注】 比较基础，直接把6拆分即成2和3

【答案】 $(1) (x + 2)(x + 3)$

【解析】 $(1) x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) .$

【标注】 **【知识点】** 二次项系数为 ± 1 的十字相乘

2. 分解因式

$$(1) x^2 - 7x + 12 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【备注】 与第一题方法相同，但需要注意把12拆成-3与-4

【答案】 $(1) (x - 3)(x - 4)$ 或 $(x - 4)(x - 3)$

【解析】 $(1) x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) .$

【标注】 **【知识点】** 利用完全平方公式因式分解

3. 因式分解： $x^2 - 2x - 8 = \underline{\hspace{2cm}} .$

【备注】 方法相同，注意-8该如何拆分，分清负号的位置

【答案】 $(x + 2)(x - 4)$

【解析】 原式 $= (x + 2)(x - 4) .$

【标注】 **【知识点】** 二次项系数为 ± 1 的十字相乘

栗子2

4. 分解因式： $-x^2 - 2x + 8 .$

【备注】二次项系数为-1，要先提出来再计算

【答案】 $-(x+4)(x-2)$.

【解析】先提取负号，令 x 的平分前为正，然后根据十字相乘法原理，可令 $a=4$ ， $b=-2$ 得：

$$-x^2 - 2x + 8 = -(x^2 + 2x - 8) = -(x+4)(x-2) .$$

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘

5. 分解因式： $-x + 12 - x^2 =$ _____ .

【备注】与第4题相同，注意 x^2 前的系数为-1

【答案】 $-(x+4)(x-3)$

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘

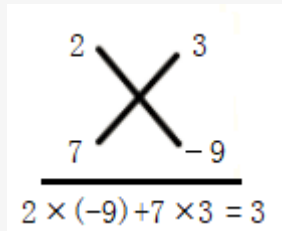
2. 二次项系数不是 ± 1

一个二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ，若可以分解，则一定可以写成 $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ 的形式，它的系数

可以写成 $\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ & \times \\ a_2 & c_2 \end{array}$ ，十字相乘就是用试验的方法找出式子线两端的数，其实就是分解系数 a, b, c ，使

得： $a_1a_2 = a$ ， $c_1c_2 = c$ ， $a_1c_2 + a_2c_1 = b$ ，从而 $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$.

【备注】如，要分解 $14x^2 + 3x - 27$


$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \times \\ 7 & -9 \\ \hline 2 \times (-9) + 7 \times 3 = 3 \end{array}$$

从而 $14x^2 + 3x - 27 = (2x + 3)(7x - 9)$.

栗子3

6. 分解因式：

(1) $3x^2 - 4x + 1 =$ _____ .

【备注】直接利用解题技巧计算

【答案】(1) $(3x - 1)(x - 1)$

【解析】 (1) $3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$.

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘

7. 分解因式 .

(1) $6x^2 + 7x - 3$.

【备注】此题重点在二次项系数的拆分，6可以有2和3，1与6两种拆法

【答案】 (1) $(2x + 3)(3x - 1)$.

【解析】 (1) $6x^2 - 7x - 3 = (2x + 3)(3x - 1)$.

【标注】【知识点】提公因式+平方差

8. 因式分解： $6x^2 - 7x - 24$.

【备注】此题二次项系数与常数项均有多种拆法，要多尝试

【答案】 $(2x + 3)(3x - 8)$.

【解析】 原式 = $(2x + 3)(3x - 8)$.

【标注】【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

栗子4

9. 分解因式：

(1) $-6x^2 - 11x + 7$.

【备注】二次项系数为-1，先提公因式，再计算

【答案】 (1) $-(2x - 1)(3x + 7)$.

【解析】 (1) $-6x^2 - 11x + 7 = -(2x - 1)(3x + 7)$.

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘；二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

10. 因式分解 .

(1) $-12x^2 - 28x + 5$.

【备注】12、24、36的拆法比较多，可给学生总结梳理

【答案】(1) $-(2x+5)(6x-1)$.

【解析】(1) 略

【标注】【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

栗子5

11. 分解下列因式：

(1) $x^2 + 7xy + 10y^2$.

(2) $x^2 - 10xy - 24y^2$.

(3) $2x^2 - xy - 3y^2$.

(4) $12x^2 + 4xy - y^2$.

【备注】常数项是字母，用前面的思路解题即可

【答案】(1) $(x+2y)(x+5y)$.

(2) $(x+2y)(x-12y)$.

(3) $(2x-3y)(x+y)$.

(4) $-(y-6x)(y+2x)$.

【解析】(1) $x^2 + 7xy + 10y^2 = (x+2y)(x+5y)$.

(2) $x^2 - 10xy - 24y^2 = (x+2y)(x-12y)$.

(3) $2x^2 - xy - 3y^2 = (2x-3y)(x+y)$.

(4) $12x^2 + 4xy - y^2 = -(y^2 - 4xy - 12x^2) = -(y-6x)(y+2x)$.

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘

栗子6

12. 因式分解：

(1) $3ax^2 + 9ax - 12a =$ _____ .

(2) $-2x^2y + 12xy - 16y =$ _____ .

(3) $x^3 - 8x^2 + 15x =$ _____ .

【备注】提公因式+十字相乘法，注意二次项为负

【答案】(1) $3a(x-1)(x+4)$

(2) $-2y(x-2)(x-4)$

(3) $x(x-3)(x-5)$

【解析】(1) 原式 $= 3a(x^2 + 3x - 4) = 3a(x-1)(x+4)$.

(2) 原式 $= -2y(x^2 - 6x + 8) = -2y(x-2)(x-4)$,

故答案为: $-2y(x-2)(x-4)$.

(3) 原式 $= x(x^2 - 8x + 15) = x(x-3)(x-5)$.

【标注】【知识点】与提公因式结合的十字相乘

二、分组分解法

将一个多项式分为二或三组, 各组分别分解后, 彼此又有公因式或者可以用公式, 这就是分组分解法.

1. 四项式分组

对于四项式, 要么“二二”分组, 要么“一三”分组.

二二分组: 分组后各组分别用平方差或提公因式, 最后再提公因式.

一三分组: “三”一定是完全平方式, “一”一定是完全平方数, 最后再用平方差.

对于项数较多的多项式, 要先观察各个项是否有公因式, 如果没有, 就观察是否部分项有公因式, 以此来对原多项式进行分组; 然后对各组再进行观察是否有公因式.

【备注】如, $3ax - 4by - 4ay + 3bx$, 我们发现这个式子的四个项是没有公因式的, 但第一项和第三项有公因式 a , 第二项和第四项有公因式 b , 所以把第一项和第三项分成一组、第二项和第四项分别提公因式, 有 $3ax - 4by - 4ay + 3bx = a(3x - 4y) + b(3x - 4y)$, 再注意到这两个部分都含有因式 $(3x - 4y)$, 所以再提一次公因式可得 $3ax - 4by - 4ay + 3bx = (3x - 4y)(a + b)$.

栗子7

13. 因式分解: $am + an + bm + bn = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】二二分组, 两项均提公因式

【答案】 $(m+n)(a+b)$

【解析】原式 $= (am + an) + (bm + bn)$

$$\begin{aligned}
 &= a(m+n) + b(m+n) \\
 &= (m+n)(a+b) . \\
 \text{故答案为: } &(m+n)(a+b) .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组分解—四项式

14. 因式分解： $9x^2 - y^2 - 4y - 4$.

【备注】二二分组，一项提公因式，一项平方差公式

【答案】 $(3x + y + 2)(3x - y - 2)$.

【解析】原式 $= (3x + y + 2)(3x - y - 2)$.

【标注】【知识点】分组分解法

栗子8

15. 因式分解： $x^2 - 4xy + 4y^2 - 1$.

【备注】一三分组，完全平方公式+平方差

【答案】 $(x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$.

【解析】原式 $= (x - 2y)^2 - 1 = (x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$.

【标注】【知识点】分组分解法

16. 分解因式： $1 - a^2 - b^2 - 2ab$.

【备注】一三分组，需要先把后三项提负号

【答案】 $(1 + a + b)(1 - a - b)$.

【解析】原式 $= 1 - (a + b)^2$
 $= (1 + a + b)(1 - a - b)$.

【标注】【知识点】分组分解—四项式

栗子9

2. 五项式分组

对于五项式，只能考虑“二三”分组，

“二”：可以用平方差或提公因式分解，“三”：用十字相乘或完全平方公式进行分解；
最后再提公因式。

栗子10

17. 分解因式： $ac - bc - a^2 + 2ab - b^2$ 。

【备注】二三分组，二用提公因式，三用完全平方公式

【答案】 $(a - b)(c - a + b)$ 。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】利用完全平方公式因式分解

【知识点】提公因式法

【知识点】分组分解法

18. 分解因式： $x^2 - 2x - 2y^2 + 4y - xy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【备注】二三分组，二用提公因式，三用十字相乘法

【答案】 $(x + y - 2)(x - 2y)$

【解析】原式 $= (x^2 - xy - 2y^2) + (-2x + 4y)$ ，

$= (x - 2y)(x + y) - 2(x - 2y)$ ，

$= (x - 2y)(x + y - 2)$ 。

【标注】【知识点】分组分解—五项式